REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	
Concours d'aptitude au professorat de l'enseignement secondaire www.tunisie-etudes.info	
EPREUVE : SESSION DE NOVEMBRE 2004	
EPREUVE : MATHEMATIQUE	**DUREE:** 4 heures

Exercice 1.

Soit P le plan affine euclidien.

1) Soit $A_1, \dots ; A_n$ n points de P et $a_1, \dots, a_n$ n nombres réels de somme non nulle. Montrer qu'il existe un unique point G tel que, pour tout point O, on ait

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{OA_i}$$

On adoptera la notation

$$G = \text{Bar}\{(A_1,a_1), \dots, (A_n,a_n)\}$$

2) Soit ABC un triangle ; on pose $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$.

2a) Calculer de deux manières $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)^2$ et en déduire que

$$2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = b^2 - a^2 - c^2$$

2b) Soit $A_1 = \text{Bar}\{(B, a^2+b^2-c^2), (C, a^2+c^2-b^2)\}$. Calculer $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{BC}$ et en déduire la construction de A_1.

3) On pose

$$L = \text{Bar}\{(A,a^2), (B,b^2), (C,c^2)\}$$

3a) Soit A' le milieu de B et C et A_2 celui de A et A_1. Montrer que le point L est sur la droite $(A'A_2)$.

3b) En déduire une construction du point L.

4) On suppose que $a \geq b \geq c$ et on pose

$$G_n = \text{Bar}\{(A,a^n), (B,b^n), (C,c^n)\}$$

4a) Que représente G_0 pour le triangle ABC ?

4b) Que représente G_1 pour le triangle ABC ?

4c) On suppose $a > b \geq c$, montrer que la suite de points (G_n) tend vers le point A.

4d) Etudier le cas où $a = b > c$ et le cas où $a = b = c$.

4e) En déduire que, dans tous les cas, la suite (G_n) tend vers un point que l'on déterminera en fonction de a, b et c.

ercice 2.

ans cet exercice, la lettre p

1) Démontrer que si $(x, y$
n'est possible.

2) On considère les trois

$A = \{(x, y, z) \in E;\ x$

$C = \{(x, y, z) \in E;\ x$

Montrer qu'ils sont de

3) On considère l'applicat

$$g(x, y, z) =$$

3a) Montrer que l'image $g($

3b) Montrer que $g(A) \subseteq C$

3c) Montrer que $g \circ g(x, y,$

3d) Montrer que g admet u

3e) En déduire que le nomb

4) Montrer que toute appli
point fixe.

5) En déduire que p est une

Exercice 3.

Soit $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une foncti
fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui s

On rappelle que pour tout t
de E vérifiant les condition

On notera dans la suite y_1

$$y_1(0)$$

et on notera $V(t)$ la matric

ercice 2.

ans cet exercice, la lettre p

1) Démontrer que si $(x, y$
n'est possible.

2) On considère les trois

$A = \{(x, y, z) \in E;\ x$

$C = \{(x, y, z) \in E;\ x$

Montrer qu'ils sont de

3) On considère l'applica

$$g(x, y, z) =$$

3a) Montrer que l'image $g($

3b) Montrer que $g(A) \subseteq C$

3c) Montrer que $g \circ g(x, y,$

3d) Montrer que g admet u

3e) En déduire que le nomb

4) Montrer que toute appli
point fixe.

5) En déduire que p est une

Exercice 3.

Soit $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une foncti
fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui s

On rappelle que pour tout
de E vérifiant les condition

On notera dans la suite y_1

$$y_1(0)$$

et on notera $V(t)$ la matric

ercice 2.

ans cet exercice, la lettre p

1) Démontrer que si $(x, y$
n'est possible.

2) On considère les trois

$A = \{(x, y, z) \in E;\ x$

$C = \{(x, y, z) \in E;\ x$

Montrer qu'ils sont de

3) On considère l'applicat

$$g(x, y, z) =$$

3a) Montrer que l'image $g($

3b) Montrer que $g(A) \subseteq C$

3c) Montrer que $g \circ g(x, y,$

3d) Montrer que g admet u

3e) En déduire que le nomb

4) Montrer que toute appli
point fixe.

5) En déduire que p est une

Exercice 3.

Soit $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une foncti
fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui s

On rappelle que pour tout t
de E vérifiant les condition

On notera dans la suite y_1

$$y_1(0)$$

et on notera $V(t)$ la matric

1) M... ...er que E est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ et que $(y_1 ...$ ... une base de E

2) M... ...rer que le déterminant de $V(t)$ est constant et vaut 1.

3) Po... tout entier n, on définit l'application T_n qui à tout élément y de ... associe la foncti... $\tilde{y}_n$ définie par

$$\tilde{y}_n(t) = y(t + n\pi)$$

3a) M... ...rer que T_n est un endomorphisme de E.

3b) Q... vaut $T_n \circ T_m$?

3c) M... ...rer que T_n est un isomorphisme de E et déterminer son inverse.

3d) E... ...e la matrice M_n de T_n dans la base (y_1, y_2).

3e) M... ...rer que la fonction y_1 est paire et que la fonction y_2 est impaire.

4) D... cette question seulement, on supposera que la fonction q est const...nte.
Ecrir... ...ns chacun des cas suivants la matrice $V(t)$:
Prem... cas : $q = 0$. Deuxième cas : $q = -\omega^2 < 0$. Troisième cas : $q = \omega^2 > 0$.

5) E... ...ulant de deux manières l'inverse de la matrice M_1, montrer que

$$M_1 = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_1(\pi) \end{pmatrix}$$

6) S... ... une valeur propre réelle de M_1, montrer que λ est non nulle et qu'il existe un élém... non nul y de E tel que

$$y(t + n\pi) = \lambda^n y(t) \ , \ t \in \mathbb{R} \, , \, n \in \mathbb{Z}$$

7) M... ...rer que si $y_1^2(\pi) > 1$, la matrice M_1 est diagonalisable et en déduire que la seule fonct... dans E qui est bornée est la fonction identiquement nulle.

8) M... ...rer que E contient une fonction π-périodique non nulle si et seulement si $y_1(\pi) = 1$.

9) M... ...rer que si $y_1(\pi) = -1$, il existe dans E une fonction non nulle et 2π-périodique.

10) ... ...uppose que $y_1^2(\pi) < 1$ et on pose $y_1(\pi) = \cos\theta$ et $y_1'(\pi) = \sin(\theta)/a$, $a \in \mathbb{R}^*$

10a) ...re la matrice de T_1 dans la base (ay_1, y_2)

10b) ...ntrer que la fonction $a^2{y_1}^2 + {y_2}^2$ est π-périodique.

10c) ... déduire que tous les éléments de E sont des fonctions bornées.